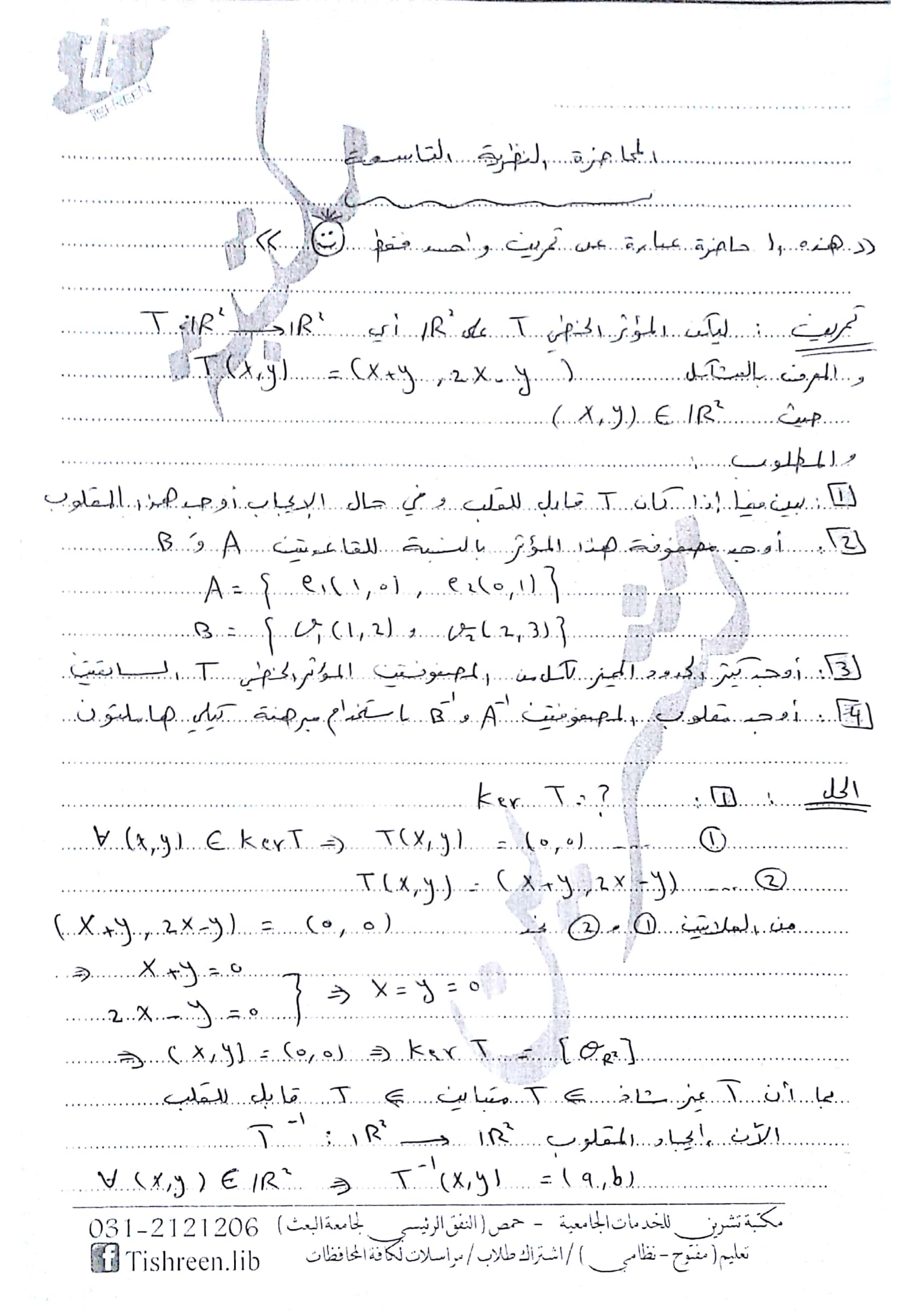


المحاضرة النظرية التاسعة

<< هذه المحاضرة عبارة عن تمرين واحد فقط >>

تمرين: ليكن المؤثر الخطي T على $\mathbb{R}^2$ أي $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

والمعرف بالشكل $T(x,y) = (x+y\ ,\ 2x-y)$

حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

والمطلوب:

1: بين فيما إذا كان T قابل للقلب وفي حال الإيجاب أوجد هذا المقلوب

2: أوجد مصفوفة هذا المؤثر بالنسبة للقاعدتين A و B

$A = \{ e_1(1,0)\ ,\ e_2(0,1) \}$

$B = \{ v_1(1,2)\ ,\ v_2(2,3) \}$

3: أوجد كثير الحدود المميز لكل من المصفوفتين المؤثر الخطي T السابقتين

4: أوجد مقلوب المصفوفتين A^{-1} و B^{-1} باستخدام مبرهنة كايلي هاملتون

الحل: 1: $\ker T = ?$

$\forall (x,y) \in \ker T \Rightarrow T(x,y) = (0,0)$ ... (1)

$T(x,y) = (x+y\ ,\ 2x-y)$ ... (2)

من العلاقتين (1) و (2) نجد $(x+y\ ,\ 2x-y) = (0\ ,\ 0)$

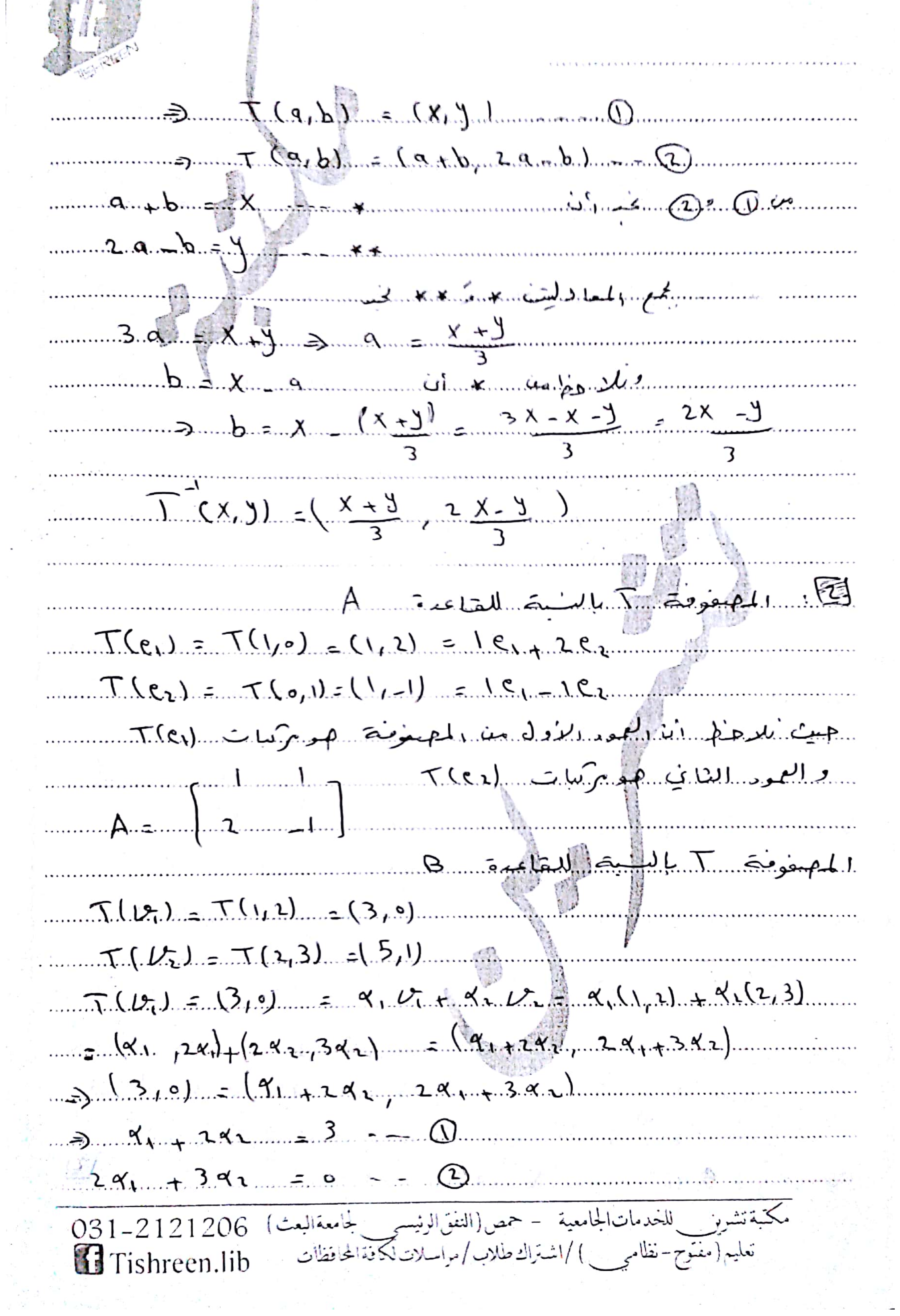
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=0$$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0) \Rightarrow \ker T = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

بما أن T غير شاذ $\Leftarrow$ T متباين $\Leftarrow$ T قابل للقلب

الآن إيجاد المقلوب $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow T^{-1}(x,y) = (a,b)$



$\Rightarrow T(a,b) = (x,y)$ ...... (1)

$\Rightarrow T(a,b) = (a+b,\ 2a-b)$ ...... (2)

من (1) و (2) نجد أن:

$a+b = x$ ... *

$2a-b = y$ ... **

بجمع المعادلتين * و ** نجد

$3a = x+y \Rightarrow a = \frac{x+y}{3}$

وبالتعويض في * أن $b = x - a$

$\Rightarrow b = x - \frac{(x+y)}{3} = \frac{3x-x-y}{3} = \frac{2x-y}{3}$

$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{3},\ \frac{2x-y}{3}\right)$

(2): المصفوفة T بالنسبة للقاعدة A

$T(e_1) = T(1,0) = (1,2) = 1e_1 + 2e_2$

$T(e_2) = T(0,1) = (1,-1) = 1e_1 - 1e_2$

حيث نلاحظ أن العمود الأول من المصفوفة هو مركبات $T(e_1)$

والعمود الثاني هو مركبات $T(e_2)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

المصفوفة T بالنسبة للقاعدة B

$T(v_1) = T(1,2) = (3,0)$

$T(v_2) = T(2,3) = (5,1)$

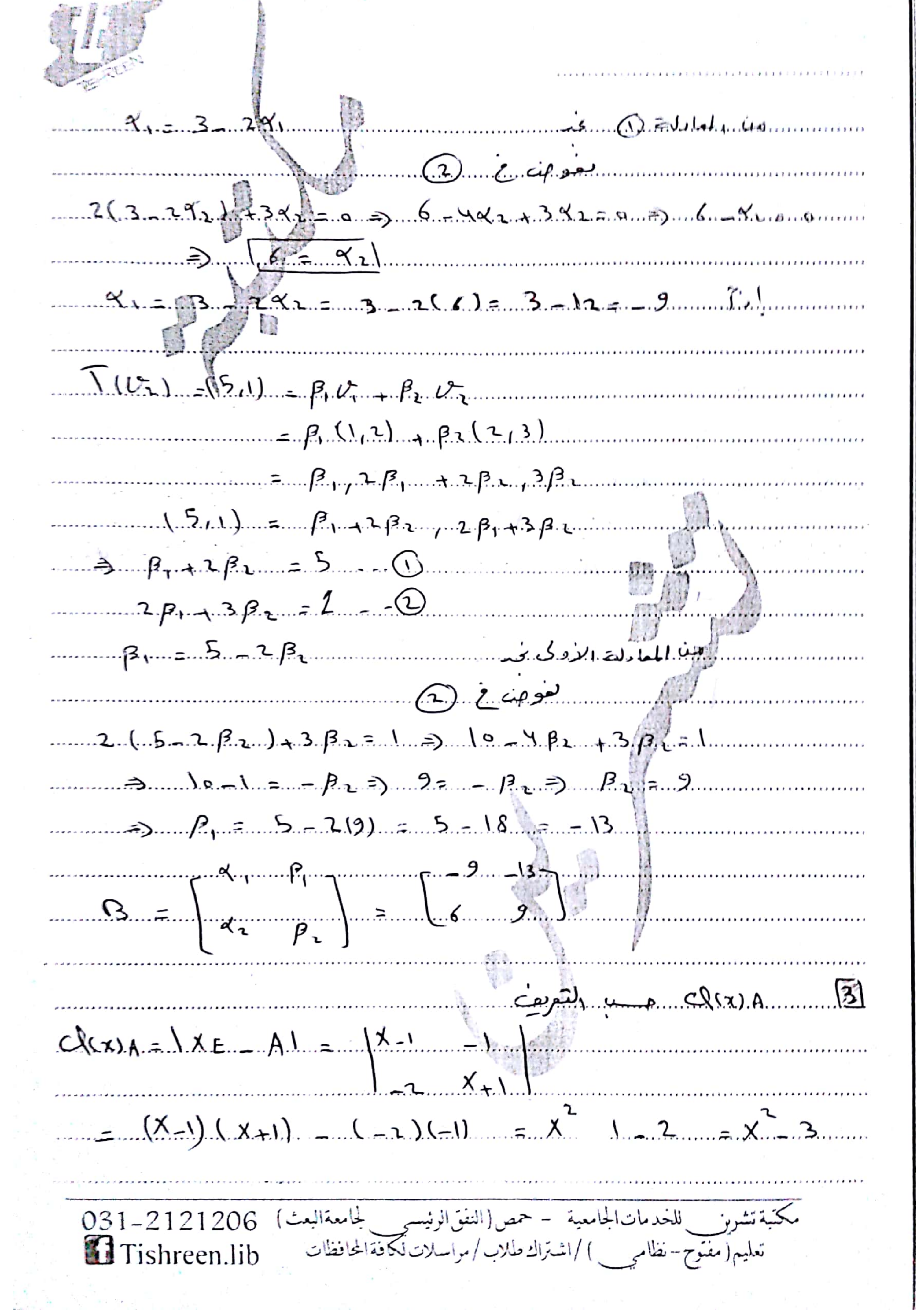
$T(v_1) = (3,0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,3)$

$= (\alpha_1,\ 2\alpha_1) + (2\alpha_2,\ 3\alpha_2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2,\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$

$\Rightarrow (3,0) = (\alpha_1 + 2\alpha_2,\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$

$\Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3$ ... (1)

$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$ ... (2)



من المعادلة ① نجد $\alpha_1 = 3 - 2\alpha_2$

نعوض في ②

$2(3-2\alpha_2)+3\alpha_2=0 \Rightarrow 6-4\alpha_2+3\alpha_2=0 \Rightarrow 6-\alpha_2=0$

$\Rightarrow \boxed{6=\alpha_2}$

إذاً $\alpha_1 = 3-2\alpha_2 = 3-2(6) = 3-12 = -9$

$T(v_2) = (5,1) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$

$= \beta_1(1,2) + \beta_2(2,3)$

$= (\beta_1, 2\beta_1) + (2\beta_2, 3\beta_2)$

$(5,1) = (\beta_1+2\beta_2, 2\beta_1+3\beta_2)$

$\Rightarrow \beta_1 + 2\beta_2 = 5$ ... ①

$2\beta_1 + 3\beta_2 = 1$ ... ②

من المعادلة الأولى نجد $\beta_1 = 5 - 2\beta_2$

نعوض في ②

$2(5-2\beta_2)+3\beta_2 = 1 \Rightarrow 10-4\beta_2+3\beta_2=1$

$\Rightarrow 10-1 = -\beta_2 \Rightarrow 9 = -\beta_2 \Rightarrow \beta_2 = 9$

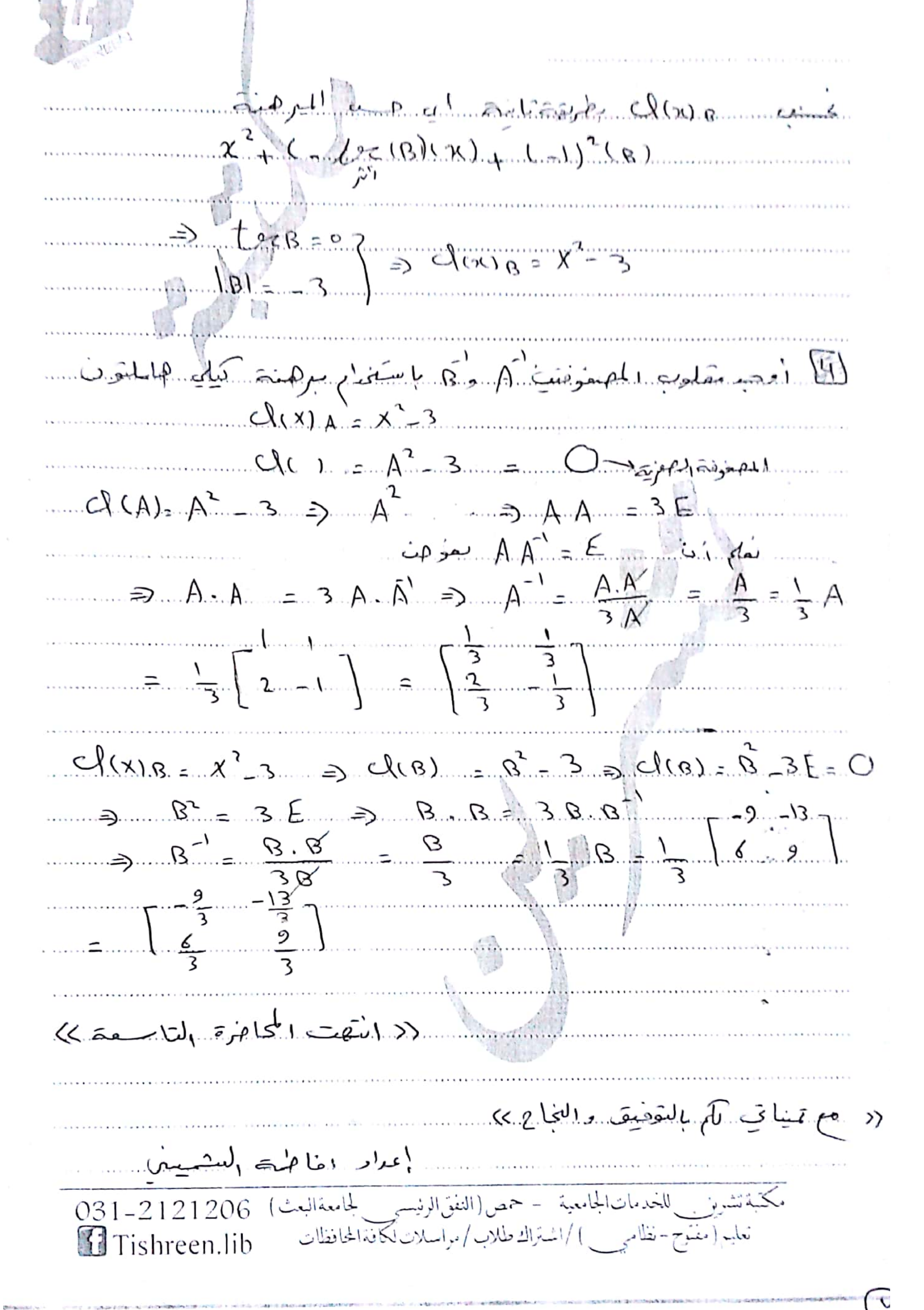
$\Rightarrow \beta_1 = 5-2(9) = 5-18 = -13$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -13 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

3. $Cl(x).A$ حسب التعريف

$$Cl(x).A = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$= (x-1)(x+1) - (-2)(-1) = x^2 - 1 - 2 = x^2 - 3$



نحسب $cl(x)_B$ بطريقة ثانية أي حسب المبرهنة

$$x^2 + (-(tr(B))(x) + (-1)^2(B))$$

أثر

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} tr B = 0 \\ |B| = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow cl(x)_B = x^2 - 3$$

4) أوجد مقلوب المصفوفتين A^{-1} و B^{-1} باستخدام مبرهنة كيلي هاملتون

$$cl(x)_A = x^2 - 3$$

$$cl(\ ) = A^2 - 3 = O$$ ← المصفوفة الصفرية

$$cl(A) = A^2 - 3 \Rightarrow A^2 \Rightarrow AA = 3E$$

نعلم أن $AA^{-1} = E$ نعوض

$$\Rightarrow A \cdot A = 3A \cdot A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{A.A}{3A} = \frac{A}{3} = \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$cl(x)_B = x^2 - 3 \Rightarrow cl(B) = B^2 - 3 \Rightarrow cl(B) = B^2 - 3E = O$$

$$\Rightarrow B^2 = 3E \Rightarrow B.B = 3B.B^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{B.B}{3B} = \frac{B}{3} = \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -9 & -13 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{9}{3} & -\frac{13}{3} \\ \frac{6}{3} & \frac{9}{3} \end{bmatrix}$$

<< انتهت المحاضرة التاسعة >>

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >>

إعداد: فاطمة الشميس